# Physikalische Simulationen

Armas Scharpegge

DPG Schülertagung 2023

Ratsgymnasium Bielefeld

# Inhalt

- Warum Simulationen?
- Methodik
- Punktmasse mit Kraft
- Gravitations-Simulation
- Wellen-Simulation
- Fazit

# Simulationen

- Vorhersagen über physikalische System
  - Sonnensystem, Asteroide
  - Verhalten von Materialien und Bauteilen
  - Automatisierung von Tests
  - Vergleich mit experimentellen Daten
  - Virtuelle Welten (Videospiele, Filme)

# Methodik

1. Modellierung des Systems
2. (Numerische) Lösung der Modellierung

# Methodik

1. Modellierung des Systems
2. (Numerische) Lösung der Modellierung

Beide Schritte lassen sich auf viele verschiedene Weisen lösen!

# Vektoren

# Vektor

- Größe in mehreren Dimensionen
  - 2D: $x$ und $y$ Koordinate
  - 3D: $x$, $y$ und $z$ Koordinate
- Rechenoperationen beziehen sich auf alle Dimensionen

# Addition 2D

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x \\ \mathbf{a}_y + \mathbf{b}_y \end{pmatrix}$$

# Addition 3D

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \\ \mathbf{b}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x \\ \mathbf{a}_y + \mathbf{b}_y \\ \mathbf{a}_z + \mathbf{b}_z \end{pmatrix}$$

# Skalarmultiplikation

$$k \begin{pmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\mathbf{a}_x \\ k\mathbf{a}_y \end{pmatrix}$$

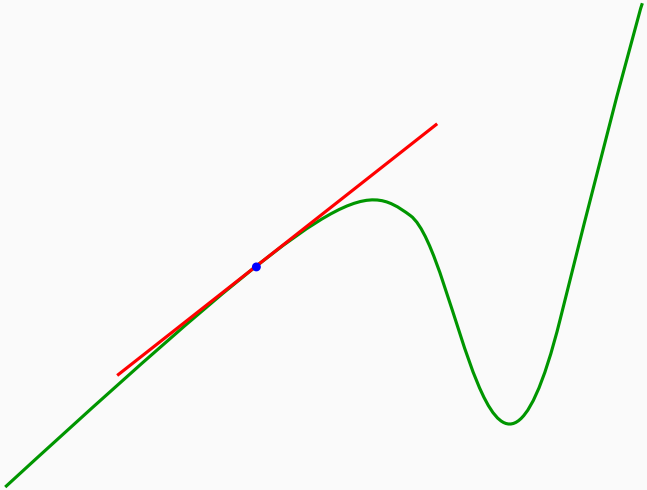
# Ableitung

# Ableitung

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}
$$

- Steigung (der Tangente) an Stelle $x$
- Wieviel verändert sich $f$ pro $x$ (genau an der Stelle $x$)?

# Ableitung



# Punktmasse

# Notation

| | |
|---|---|
| Position | $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_x \\ \mathbf{x}_y \\ \mathbf{x}_z \end{pmatrix}$ |
| Geschwindigkeit | $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}$ |
| Beschleunigung | $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{a}$ |

# Newtons Gesetze

1. Ein kräftefreier Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.
2. $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{a}$
3. Kraft gleich Gegenkraft: Eine Kraft von Körper A auf Körper B geht immer mit einer gleich großen, aber entgegen gerichteten Kraft von Körper B auf Körper A einher.

# Differentialgleichung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$$
$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{F}(t)}{m} = \mathbf{a}(t)$$

# Lösung

Wenn $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ nur von $t$, aber nicht von $\mathbf{x}(t)$ und $\dot{\mathbf{x}}(t)$ abhängig ist:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{v}_0 + \int_0^t \ddot{\mathbf{x}}(x)\,dx \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \dot{\mathbf{x}}(x)\,dx \\ &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t \int_0^x \ddot{\mathbf{x}}(y)\,dy\,dx\end{aligned}$$

# Konstante Kraft

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t \int_0^x \mathbf{a}\, dy\, dx \\
&= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t \mathbf{a} x\, dx \\
&= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a} t^2
\end{aligned}
$$

# Konstante Kraft

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t \int_0^x \mathbf{a}\, dy\, dx \\ &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t \mathbf{a} x\, dx \\ &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

# Umsetzung

```
function getAnalyticPosition(x0, v0, a, t)
{
    // x = x0 + v0 * t + 1/2 * a * t^2
    return x0.add(v0.mul(t)).add(a.mul(0.5 * t * t));
}

function getAnalyticVelocity(v0, a, t)
{
    // v = v0 + a * t
    return v0.add(a.mul(t));
}
```

# Schräger Wurf

```
var initialPos = new Vector2(0.5, 2);
var initialVelocity = new Vector2(8, 4);
var gravityVec = new Vector2(0.0, -9.81);
```

Mit steigendem currentTime:

```
curPos = getAnalyticPosition(initialPos, initialVelocity,
                             gravityVec, currentTime);
curVel = getAnalyticVelocity(initialVelocity, gravityVec,
                             currentTime);
```

# Demo

Siehe `https://ascharpegge.codeberg.page/dpg23/code/point_mass_sim/sim.html?gravity=0.0,-9.81&integrator=analytic`.

# Gravitations-Simulation

# Modellierung

Für $n$ Partikel $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i,0}$$
$$\dot{\mathbf{x}}_i(0) = \mathbf{v}_{i,0}$$
$$\ddot{\mathbf{x}}_i(t) = \frac{\mathbf{F}_i}{m}$$

# Modellierung

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

# Modellierung

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\mathbf{F}_{i,j} = \gamma \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_{i,j}\|^2} \hat{\mathbf{r}}_{i,j}$$

$$\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{i,j} = \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{\|\mathbf{r}_{i,j}\|}$$

# Modellierung

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i &= \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j} \\ &= \mathbf{F}_{i,1} + \mathbf{F}_{i,2} + \cdots + \mathbf{F}_{i,i-1} + \mathbf{F}_{i,i+1} + \cdots + \mathbf{F}_{i,n}\end{aligned}$$

# Analytische Lösung?

# Analytische Lösung?

Integrieren geht nicht! ($\ddot{\mathbf{x}}(t)$ hängt von $\mathbf{x}(t)$ ab)

# Analytische Lösung?

Integrieren geht nicht! ($\ddot{\mathbf{x}}(t)$ hängt von $\mathbf{x}(t)$ ab)

Selbst für $n = 3$ ist keine allgemeine Lösung durch Elementarfunktionen bekannt (Three-body problem) [1].

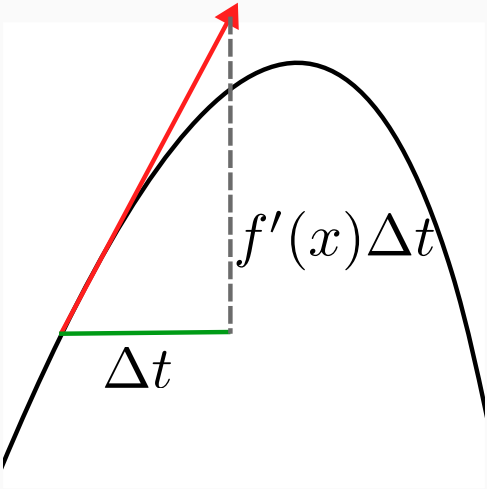
# Analytische Lösung?

Integrieren geht nicht! ($\ddot{\mathbf{x}}(t)$ hängt von $\mathbf{x}(t)$ ab)

Selbst für $n = 3$ ist keine allgemeine Lösung durch Elementarfunktionen bekannt (Three-body problem) [1].

Lösung: Numerische Integration

# Numerische Integration



# Explizites Eulerverfahren [2]

$$\mathbf{x}_n \approx \mathbf{x}(n\Delta t)$$
$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \dot{\mathbf{x}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_n$$
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_n$$

# Symplektisches Eulerverfahren [3]

$$\mathbf{x}_n \approx \mathbf{x}(n\Delta t)$$
$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \dot{\mathbf{x}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_n$$
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{n+1}}$$

# Symplektisches Eulerverfahren [3]

$$\mathbf{x}_n \approx \mathbf{x}(n\Delta t)$$
$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \dot{\mathbf{x}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_n$$
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{n+1}}$$

$\Rightarrow$ bessere Energieerhaltung

# Code

```
class EulerParticle2 {
    constructor(m = 1.0,
                x = new Vector2(0.0, 0.0),
                v = new Vector2(0.0, 0.0)) {
        this.m = m;
        this.x = x.clone();
        this.v = v.clone();
    }

    // ...
}
```

# Code

```
    step(F, dt) {
        // v' = v + F/m * dt
        this.v = this.v.add(F.mul(dt / this.m));
        // x' = x + v' * dt
        this.x = this.x.add(this.v.mul(dt));
    }
```

# Code

```
    unstep(F, dt) {
        // x = x' - v' * dt
        this.x = this.x.sub(this.v.mul(dt));
        // v = v' - F/m * dt
        this.v = this.v.sub(F.mul(dt / this.m));
    }
```

# Code

```
var GRAV_CONSTANT = 6.674e-11;

function calcForce(x1, m1, x2, m2) {
    var r = x2.sub(x1);
    var rLen2 = r.len2();
    var rLen = r.len();
    return r.mul(GRAV_CONSTANT * m1 * m2 / rLen2 / rLen);
}
```

# Code

```
function simulateForward(deltaTime, numSubsteps) {
    currentTime += deltaTime;
    var dt = deltaTime / numSubsteps;

    for (var substep = 0; substep < numSubsteps; substep++) {
        // ...
    }
    for (var i = 0; i < particles.length; i++) {
        lastParticlePos[i].push(particles[i].x.clone());
    }
}
```

# Code

```
var particle_forces = [];
for (var i = 0; i < particles.length; i++)
    particle_forces.push(new Vector2(0.0, 0.0));
for (var i = 0; i < particles.length; i++) {
    for (var j = i+1; j < particles.length; j++) {
        var F = calcForce(particles[i].x, particles[i].m,
                          particles[j].x, particles[j].m);
        particle_forces[i] = particle_forces[i].add(F);
        particle_forces[j] = particle_forces[j].add(F.neg());
    }
    particles[i].step(particle_forces[i], dt);
}
```

# Demo

Siehe `https://ascharpegge.codeberg.page/dpg23/code/gravity_sim/sim.html`.

# Wellen-Simulation

# 1D Wellengleichung

$$\partial_{tt} u(t,x) = c^2 \partial_{xx} u(t,x)$$

$u(t,x)$ : Auslenkung an Position $x$ zur Zeit $t$

$c$ : Ausbreitungsgeschwindigkeit

# Partielle Ableitung

$$\partial_t u = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h}$$

# Partielle Ableitung

$$u(t,x) = x^2 + e^{xt}$$
$$\partial_t u = x e^{xt}$$
$$\partial_{tt} u = x^2 e^{xt}$$
$$\partial_{xx} u = 2 + t^2 e^{xt}$$

# 2D Wellengleichung

$$\partial_{tt} u = c^2 \left( \partial_{xx} u + \partial_{yy} u \right)$$

$u(t, x, y)$ : Auslenkung an Position $(x, y)$ zur Zeit $t$

$c$ : Ausbreitungsgeschwindigkeit

# Voraussetzungen

- Initial conditions: Anfangszustand
- Boundary conditions: Dauerhafte Grenzbedingungen
  - nicht unbedingt nur an den Rändern (Wände im Raum)

# Analytische Lösung?

- nur ohne / mit einfachen Grenzbedingungen

# Analytische Lösung?

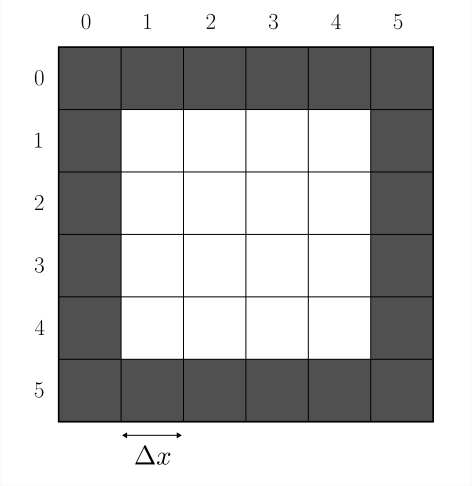
- nur ohne / mit einfachen Grenzbedingungen

$\Rightarrow$ numerische Lösung

# Diskretisierung

$$t_n = t_0 + n\Delta t$$
$$u_{n,i,j} = u(t_n, i\Delta x, j\Delta x)$$

# Geometrie



# Finite Difference Method [4]

- Lösungsmethode für partielle Differentialgleichungen
- Diskretisierung der Variablen ($t$ und $u$)
- Diskretisierung der Ableitungen
- Lösung der resultierenden *normalen* Gleichung

# Central Difference Scheme

$$
\begin{aligned}
\partial_{tt} u_{n,i,j} &\approx \frac{\frac{u_{\mathbf{n+1},i,j} - u_{\mathbf{n},i,j}}{\Delta t} - \frac{u_{\mathbf{n},i,j} - u_{\mathbf{n-1},i,j}}{\Delta t}}{\Delta t} \\
&= \frac{(u_{\mathbf{n+1},i,j} - u_{\mathbf{n},i,j}) - (u_{\mathbf{n},i,j} - u_{\mathbf{n-1},i,j})}{\Delta t^2} \\
&= \frac{u_{\mathbf{n+1},i,j} - 2u_{\mathbf{n},i,j} + u_{\mathbf{n-1},i,j}}{\Delta t^2}
\end{aligned}
$$

# Central Difference Scheme

$$\partial_{\mathbf{tt}} u_{n,i,j} \approx \frac{u_{\mathbf{n+1},i,j} - 2u_{\mathbf{n},i,j} + u_{\mathbf{n-1},i,j}}{\Delta t^2}$$

$$\partial_{\mathbf{xx}} u_{n,i,j} \approx \frac{u_{n,\mathbf{i+1},j} - 2u_{n,\mathbf{i},j} + u_{n,\mathbf{i-1},j}}{\Delta x^2}$$

$$\partial_{\mathbf{yy}} u_{n,i,j} \approx \frac{u_{n,i,\mathbf{j+1}} - 2u_{n,i,\mathbf{j}} + u_{n,i,\mathbf{j-1}}}{\Delta x^2}$$

# Lösen

Gesuchst ist $u_{\mathbf{n+1},i,j}$.

# Gesamtgleichung

Mit $d_{\mathbf{i}} = u_{n,\mathbf{i+1},j} - 2u_{n,\mathbf{i},j} + u_{n,\mathbf{i-1},j}$ etc.:

$$\partial_{tt} u = c^2 \left(\partial_{xx} u + \partial_{yy} u\right)$$

$$\Rightarrow \frac{u_{\mathbf{n+1},i,j} - 2u_{n,i,j} + u_{\mathbf{n-1},i,j}}{\Delta t^2} = c^2 \left(\frac{d_{\mathbf{i}}}{\Delta x^2} + \frac{d_{\mathbf{j}}}{\Delta x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow u_{\mathbf{n+1},i,j} = 2u_{n,i,j} - u_{\mathbf{n-1},i,j} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \left(d_{\mathbf{i}} + d_{\mathbf{j}}\right)$$

# Gesamtgleichung

$$s = u_{n,\mathbf{i+1},j} + u_{n,i,\mathbf{j+1}} + u_{n,\mathbf{i-1},j} + u_{n,\mathbf{j-1}}$$

$$k = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$$

$$u_{\mathbf{n+1},i,j} = (2 - k)\, u_{n,i,j} + ks - u_{\mathbf{n-1},i,j}$$

$\Rightarrow$ Neuer Zustand kann durch aktuellen + vorherigen Zustand berechnet werden (3 Buffer).

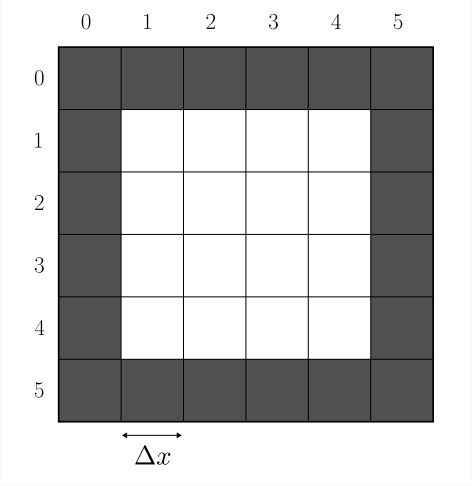
# Initial conditions

- beliebige Anfangszustände für $u_{0,i,j}$ und $u_{-1,i,j}$
- z.B. Kreiswelle oder Punkt

# Boundary conditions

- $u_{n,i-1,j}$ am linken Rand nicht gegeben (usw.)
  - Extra-Schicht an allen Seiten, die nicht normal simuliert wird

# Geometrie



# Dirichlet condition

- fester Wert $(0)$ an den Grenzen
- festes Ende
- Reflexion mit Vorzeichenwechsel

# Wände

- eine Zelle kann als Wand markiert werden
- z.B. Dirichlet condition
  - Zelle hat immer Wert $0$

# Quellen

- eine Zelle oszilliert andauernd
  - Dirichlet condition

$$u_{t,i,j} = A_0 \cos(\omega t)$$

# Absorbing boundary condition

- keine Reflexion der Welle
- Perfectly matched layer: Spezielle Dämpfung an den Rändern [5]

# Implementation

```
class Buffers {
    constructor(width, height) {
        this.b = [
            new Float32Array(width * height),
            new Float32Array(width * height),
            new Float32Array(width * height)
        ];
        this.prevIdx = 0;
    }
}
```

# Triple Buffer

```
class Buffers {
    prev() {
        return this.b[this.previdx];
    }
    cur() {
        return this.b[(this.previdx + 1) % 3];
    }
    next() {
        return this.b[(this.previdx + 2) % 3];
    }
}
```

# Triple Buffer

```
class Buffers {
    step() {
        this.prevIdx = (this.prevIdx + 1) % 3;
    }
}
```

# WaveSim Init

```
class WaveSim {
    constructor(width, height, dt, dx, c) {
        this.w = width; this.h = height; this.dt = dt;
        this.dx = dx; this.c = c;

        this.k = this.c * this.dt / this.dx;
        this.k = this.k * this.k;
        this.time = 0.0;
        this.b = new Buffers(width+2, height+2);
    }
}
```

# WaveSim Reset

```
class WaveSim {
    reset() {
        this.time = 0.0;
        this.b.prev().fill(0.0);
        this.b.cur().fill(0.0);
        this.b.next().fill(0.0);
        this.setBoundary();
    }
}
```

# WaveSim Step

```
class WaveSim {
    step() {
        for (var y = 1; y < this.h+1; y++) {
            for (var x = 1; x < this.w+1; x++) {
                // calc
            }
        }
        this.b.step();
        this.setBoundary();
        this.time += this.dt;
    }
}
```

# WaveSim Calc

```
this.b.next()[y * (this.w + 2) + x] =
    (2 - 4 * this.k) * this.b.cur()[y * (this.w + 2) + x]
    - this.b.prev()[y * (this.w + 2) + x]
    + this.k * (
        this.b.cur()[y * (this.w + 2) + x + 1]
            + this.b.cur()[y * (this.w + 2) + x - 1]
            + this.b.cur()[(y + 1) * (this.w + 2) + x]
            + this.b.cur()[(y - 1) * (this.w + 2) + x]
    );
```

# WaveSim Boundary

```
function slitBoundary(sourceX, sourceY, slitSize,
    slitPadding, slitMiddle, slitPos, m, numSlits) {
    return function() {
        this.b.cur()[(sourceY + 1) * (this.w + 2)
            + sourceX + 1] = Math.cos(this.time * 10);

        // set all wall cells to 0
        // ...
    }
}
```

# Demo

Siehe https://ascharpegge.codeberg.page/dpg23/code/wave_sim/sim.html?numSlits=1.

# Demo

Siehe https://ascharpegge.codeberg.page/dpg23/code/wave_sim/sim.html?numSlits=2.

# Demo

Siehe https://ascharpegge.codeberg.page/dpg23/code/wave_sim/sim.html?numSlits=4.

# Extra

- Simulationen von Nils Berglund auf YouTube
  - Tutorial: How to simulate the wave equation [6]
- Ten Minute Physics von Matthias Müller [7]

# Fazit

# Fazit

- (partielle) Differenzialgleichungen
- meist nur numerische Lösung möglich
  - Diskretisierung von Zeit und Raum
- für bekannte Kraft: numerische Integration

# Fazit

- (partielle) Differenzialgleichungen
- meist nur numerische Lösung möglich
  - Diskretisierung von Zeit und Raum
- für bekannte Kraft: numerische Integration

Einfach mal ausprobieren!

# Quellen i


[1] Wikipedia contributors, "Three-body problem — Wikipedia, the free encyclopedia." 2023. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Three-body_problem

[2] Wikipedia contributors, "Euler method — Wikipedia, the free encyclopedia." 2023. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method

[3] Wikipedia contributors, "Semi-implicit euler method — Wikipedia, the free encyclopedia." 2023. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-implicit_Euler_method

# Quellen ii


[4] Wikipedia contributors, "Finite difference method — Wikipedia, the free encyclopedia." 2023. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method

[5] Wikipedia contributors, "Perfectly matched layer — Wikipedia, the free encyclopedia." 2023. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Perfectly_matched_layer

[6] Nils Berglund, Ed., *Tutorial: How to simulate the wave equation*, (Jul. 08, 2023). Accessed: Jul. 22, 2023. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=pN-gi_omIVE

# Quellen iii

[7] M. Müller, "Ten Minute Physics." 2023. Available: https://matthias-research.github.io/pages/tenMinutePhysics/index.html

# Dateien

https://ascharpegge.codeberg.page/dpg23

# Lizenzen

- Code: `Apache-2.0`
- Inhalte: `CC-BY-SA-4.0`
- QR-Code: `CC0-1.0`